

БЛОК №3

3. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ 3.1. Теоретические положения

Под **позиционными** задачами понимаются задачи на определение взаимного положения различных геометрических фигур. К ним относятся задачи на взаимную принадлежность и задачи на пересечение.

3.1.1. Задачи на взаимную принадлежность

Точка принадлежит прямой, если проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой. Т.е. символически можно записать: из того, что $A \in a$ следует $A_1 \in a_1$, $A_2 \in a_2$ и наоборот (рис.8).

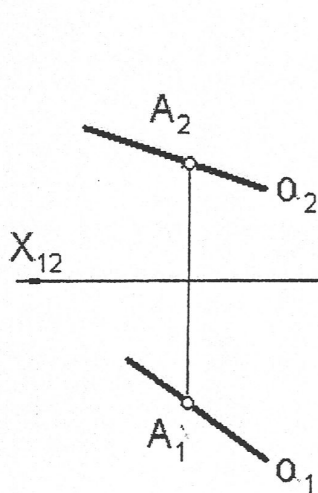


Рис.8

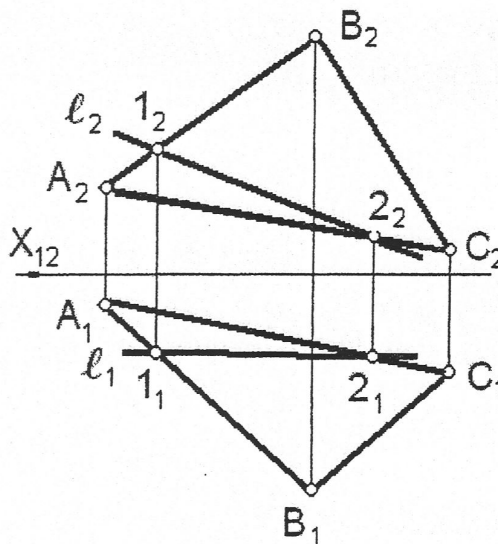


Рис.9

Прямая принадлежит плоскости, если две любые её точки принадлежат этой плоскости. Например, $\ell \in \Sigma(A,B,C)$ так как имеет с ней две общие точки 1 и 2 (рис.9).

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости: $M \in \Sigma(A,B,C)$, т.к. $M \in \ell$, а $\ell \in \Sigma(A,B,C)$ (рис.10).

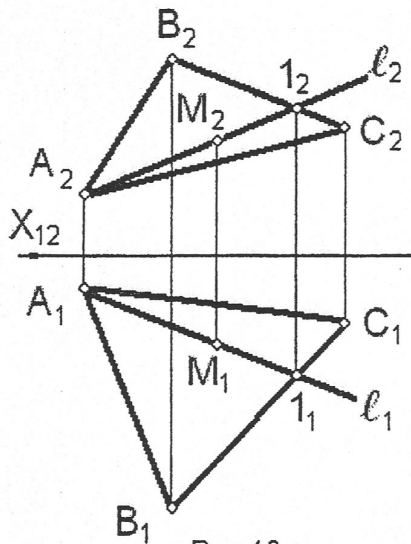


Рис.10

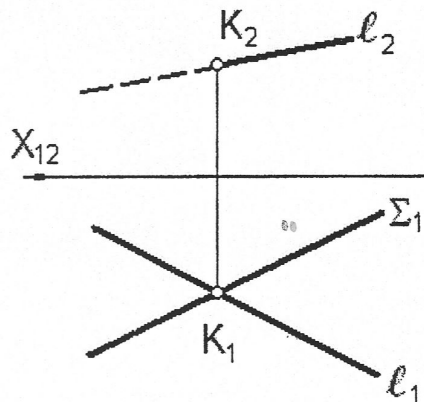


Рис.11

3.1.2. Задачи на пересечение

Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью

Точка K (рис.11) есть точка пересечения прямой ℓ с проецирующей плоскостью $\Sigma(\Sigma_1)$. На плоскости Π_1 вся прямая ℓ видима, т.к. плоскость Σ проецирующая (на Π_1 плоскость Σ проецируется в прямую линию), а на Π_2 правая часть прямой ℓ невидима, ввиду того, что она закрыта плоскостью Σ .

Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения

Если прямая ℓ занимает проецирующее положение (рис.12), то одна проекция точки пересечения – K_1 уже известна, как совпадающая с вырожденной проекцией прямой. Вторая проекция точки K – K_2 определяется по принадлежности точки K плоскости Σ с помощью прямой n , проходящей через точки A и 1 заданной плоскости.

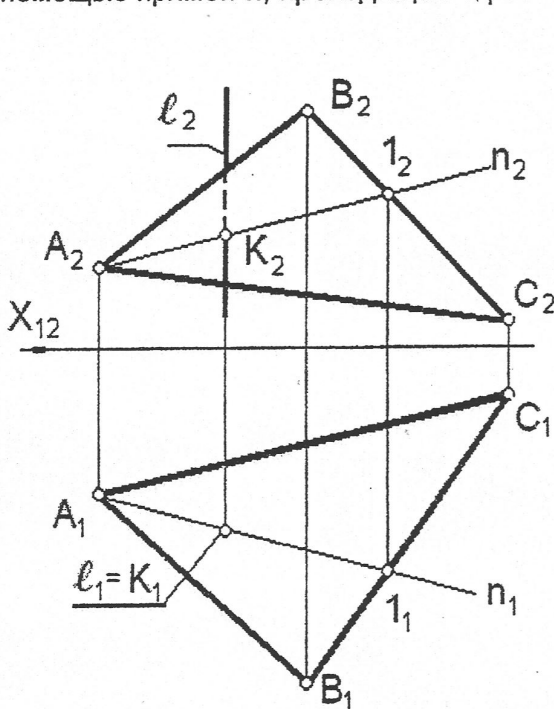


Рис.12

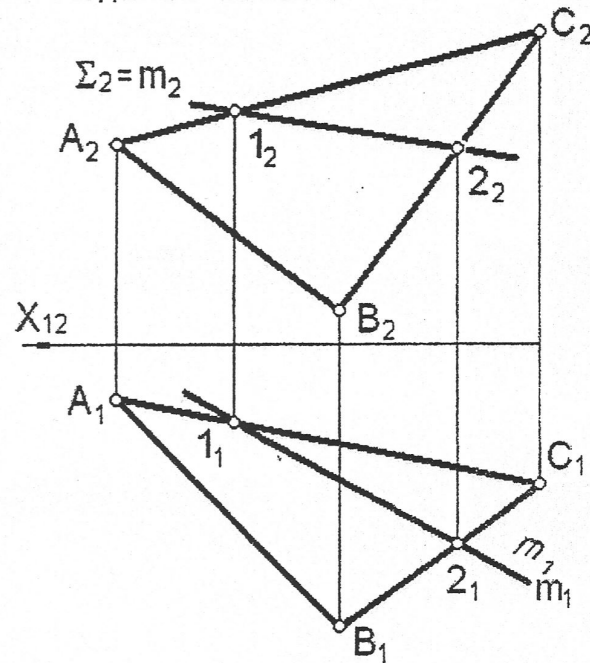


Рис.13

Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью

Одна проекция линии пересечения m – m_2 (рис.13) определяется точками 1 и 2 пересечения сторон треугольника ABC с вырожденной проекцией фронтально-проецирующей плоскости Σ . Горизонтальную проекцию находим по принадлежности точек 1 и 2 сторонам треугольника с помощью вертикальных линий связи.

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения (Первая основная позиционная задача)

Формулировка задачи: Построить точку пересечения K прямой ℓ общего положения с плоскостью общего положения $\Delta(A,B,C)$ и определить видимость прямой относительно непрозрачной плоскости Δ (рис.14).

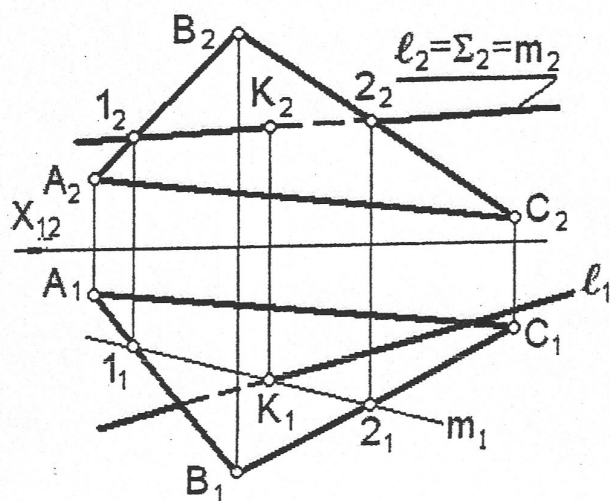


Рис.14

Схема решения задачи:

1. Через прямую ℓ (рис.14) проводим проецирующую плоскость – посредник. В приведенном примере плоскостью-посредником является фронтально-проецирующая плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$. В качестве плоскости-посредника можно выбирать и горизонтально-проецирующую плоскость, проходящую через прямую ℓ .
2. Строим линию пересечения $m(m_2, m_1)$ заданной плоскости $\Delta(A, B, C)$ с проецирующей плоскостью-посредником $\Sigma(\Sigma_2)$ (рис.13, 14).
3. Отмечаем точку пересечения прямых ℓ и m : $\ell_1 \cap m_1 = K_1$; $K_2 \in \ell_2$. Точка K –

искомая точка пересечения прямой ℓ и плоскости $\Delta(ABC)$.

4. Определяем видимость прямой ℓ относительно непрозрачной плоскости Δ с помощью конкурирующих точек.

Условия видимости на чертеже. Для придания наглядности чертежу определяют

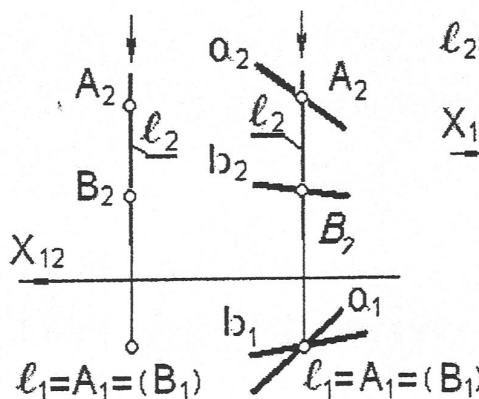


Рис.15а

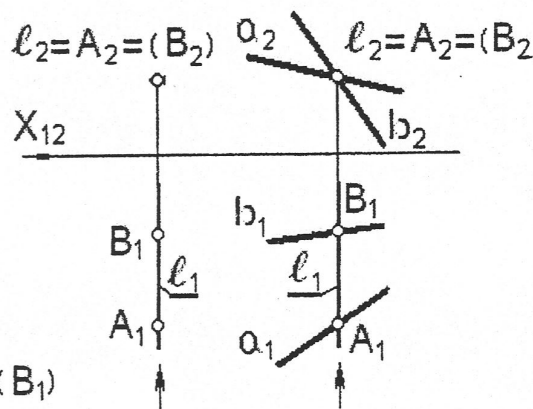


Рис.15б

видимость прямой ℓ относительно плоскости Δ . Видимость определяется по конкурирующим точкам. Конкурирующими называются точки, принадлежащие одной проецирующей прямой. При виде сверху на Π_1 видимой будет та точка, высота которой больше, т.е. точка A (рис.15а). При виде спереди на Π_2 видимой будет та точка, глубина которой больше (рис.15б).

Пересечение двух плоскостей общего положения (Вторая основная позиционная задача)

Как известно, две плоскости пересекаются по прямой линии. Чтобы построить эту линию пересечения необходимо найти две общие точки заданных плоскостей. Для нахождения этих точек вводят вспомогательные проецирующие плоскости-посредники пересекающие заданные (рис.13, 16).

Формулировка задачи. Построить линию пересечения ℓ двух плоскостей общего положения $\Sigma(a \cap b)$ и $\Gamma(c \cap d)$.

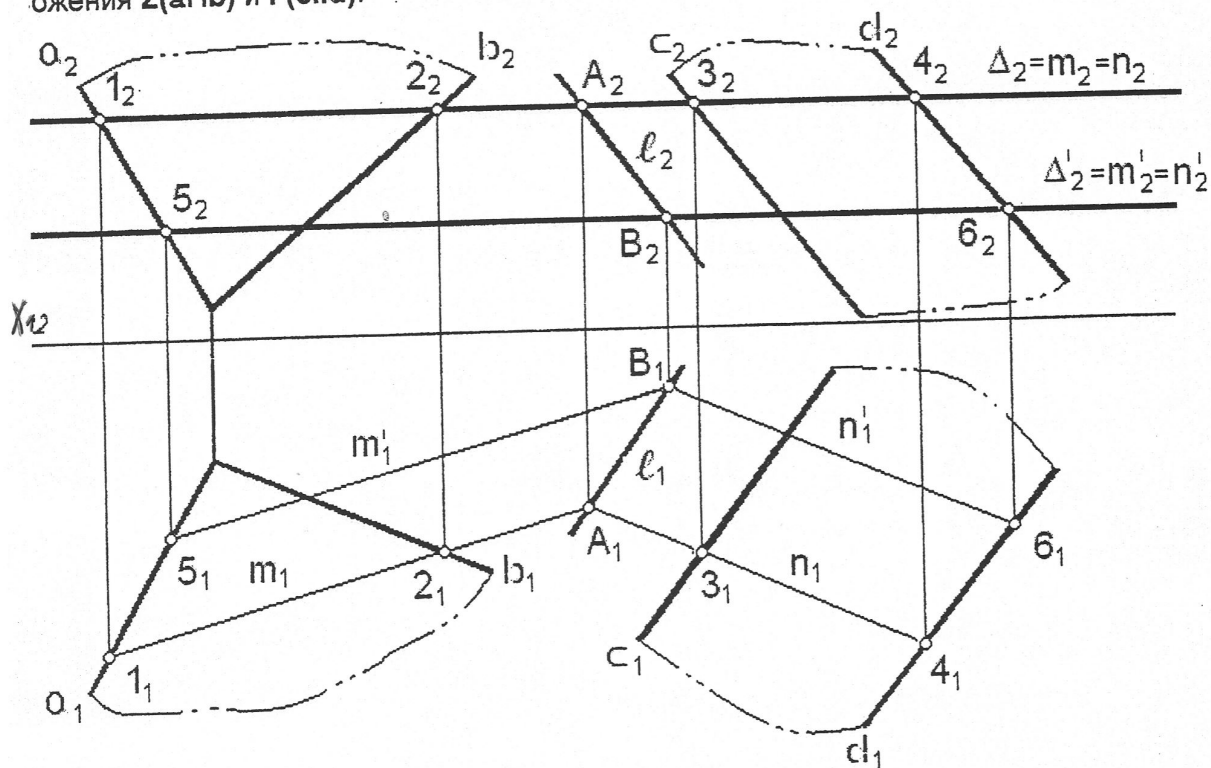


Рис.16

Схема решения задачи:

1. Проводим проецирующую плоскость-посредник $\Delta(\Delta_2)$.
2. Строим две прямые m и n пересечения заданных плоскостей Σ и Γ с плоскостью-посредником Δ .
3. Отмечаем точку $A(A_1, A_2)$ пересечения двух построенных линий m и n .
4. Проводим проецирующую плоскость-посредник Δ' (лучше, если $\Delta' \parallel \Delta$).
5. Как и для первой плоскости-посредника строим прямые пересечения m' и n' .
6. Отмечаем точку $B(B_1, B_2)$ пересечения двух построенных линий m' и n' .
7. Через точки A и B проводим прямую ℓ -линию пересечения плоскостей Σ и Γ .

Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости. Если $\ell_1 \parallel m_1$, $\ell_2 \parallel m_2$, то $\ell \parallel \Sigma$, так как $m \parallel \ell$ и $m \in \Sigma$ (рис.17).

Параллельность двух плоскостей

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Т.е. $\Sigma(a \cap b) \parallel \Delta(m \cap n)$, если $a_1 \parallel m_1$, $a_2 \parallel m_2$, $b_1 \parallel n_1$, $b_2 \parallel n_2$ (рис.18).

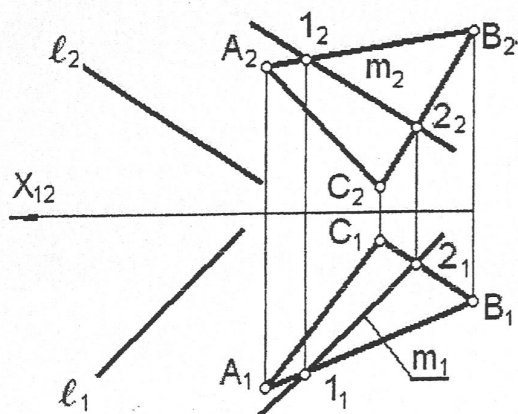


Рис.17

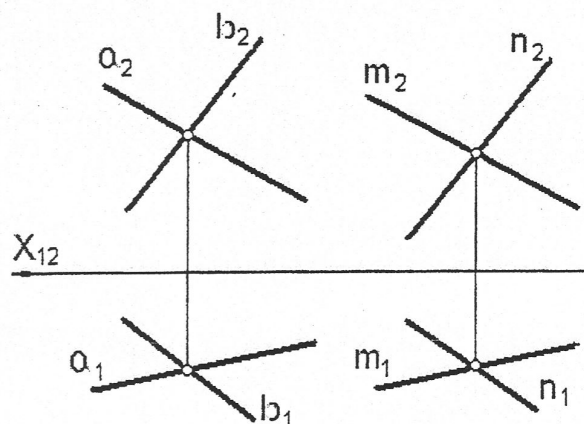


Рис.18

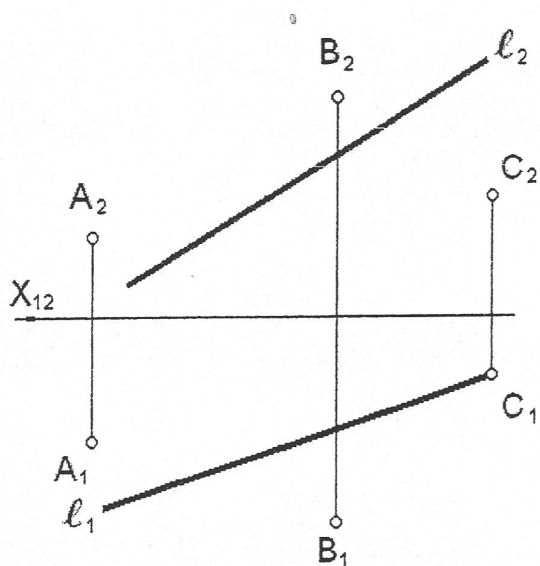
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие задачи называются позиционными?
2. В каких случаях точка принадлежит прямой, плоскости?
3. Когда прямая принадлежит плоскости?
4. Как решается первая основная позиционная задача?
5. Как определяется видимость точек и прямых на чертеже?
6. В чем заключается способ плоскостей-посредников?
7. Как решается вторая основная позиционная задача?
8. Сформулируйте условие параллельности прямой и плоскости.
9. Как построить плоскость, параллельную заданной плоскости?

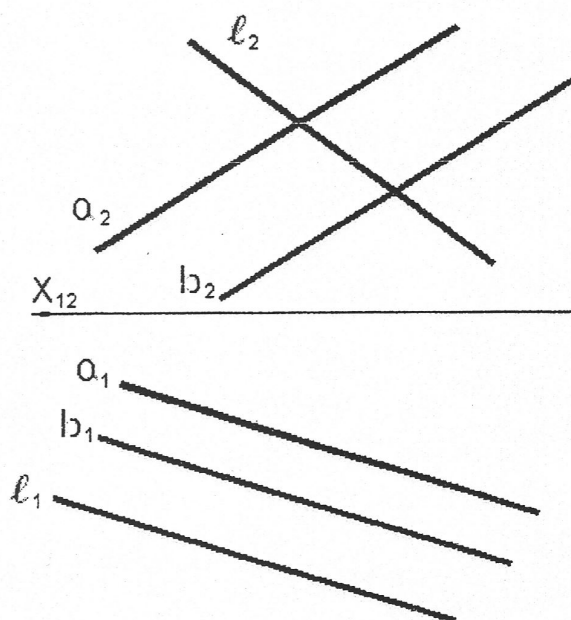
3.2. Задачи

1. Определить, принадлежит ли прямая ℓ плоскости Σ в следующих случаях:

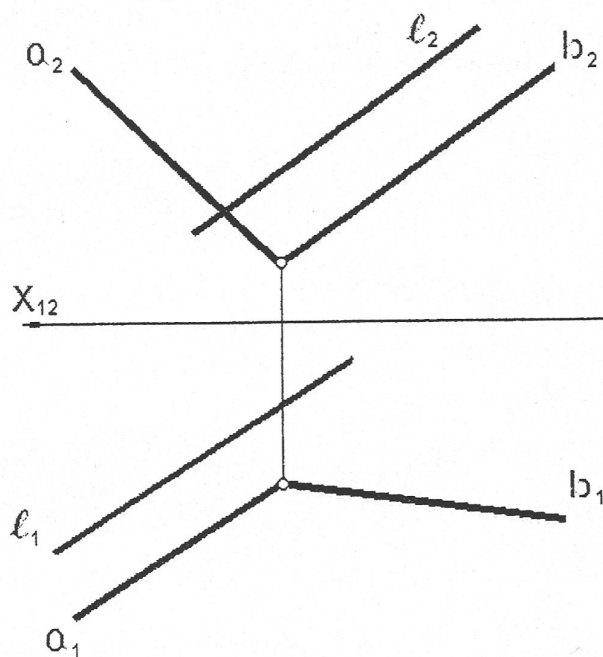
а) $\Sigma(A, B, C)$



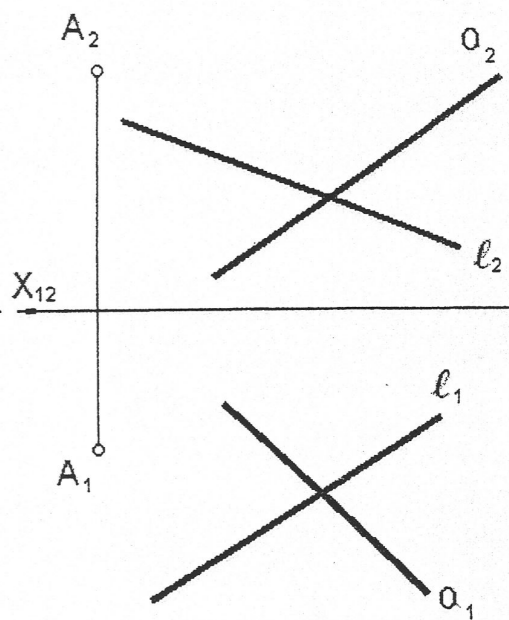
б) $\Sigma(\text{all } b)$



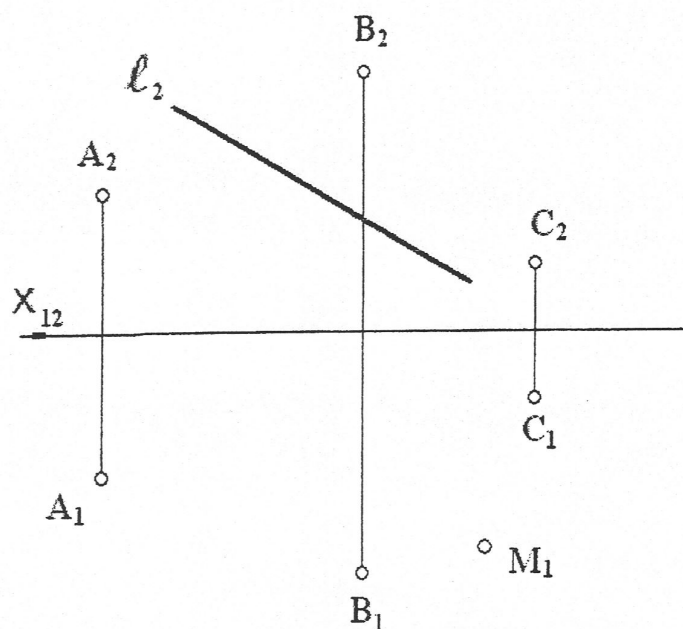
в) $\Sigma(a \cap b)$



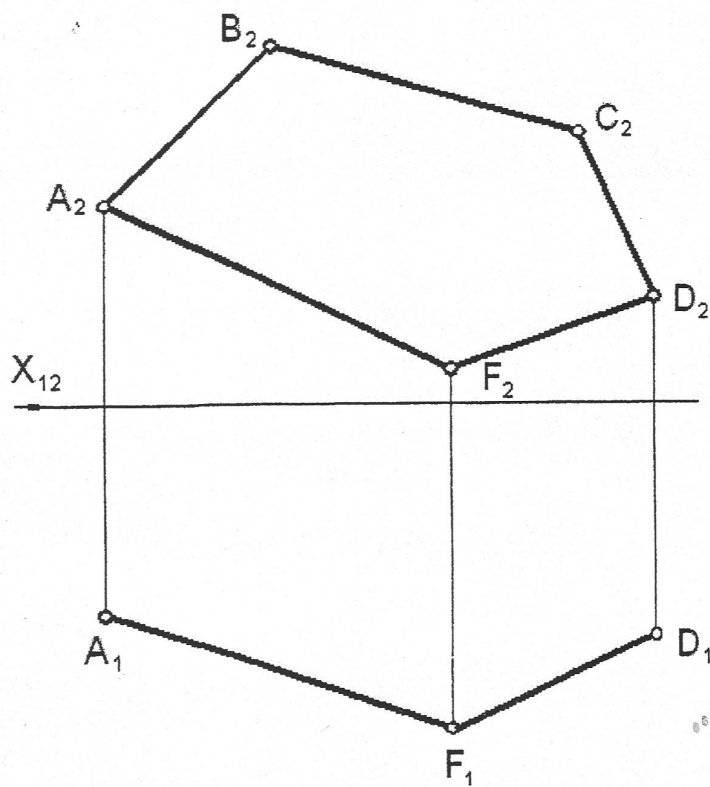
г) $\Sigma(A, a)$



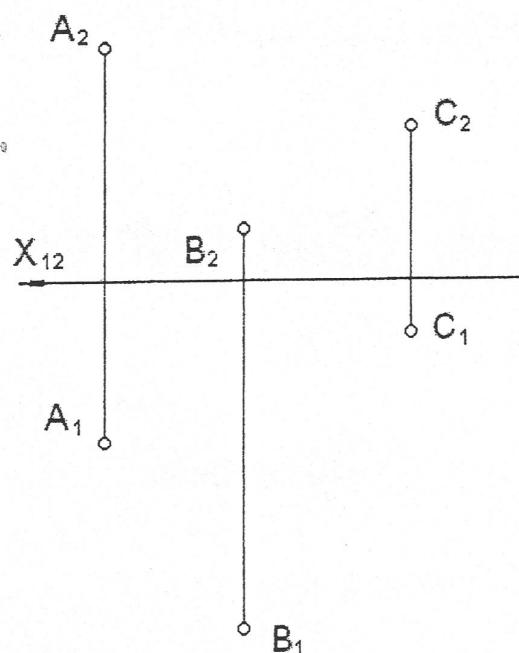
2. Достроить недостающие проекции прямой ℓ и точки M при условии их принадлежности плоскости $\Sigma(A, B, C)$.



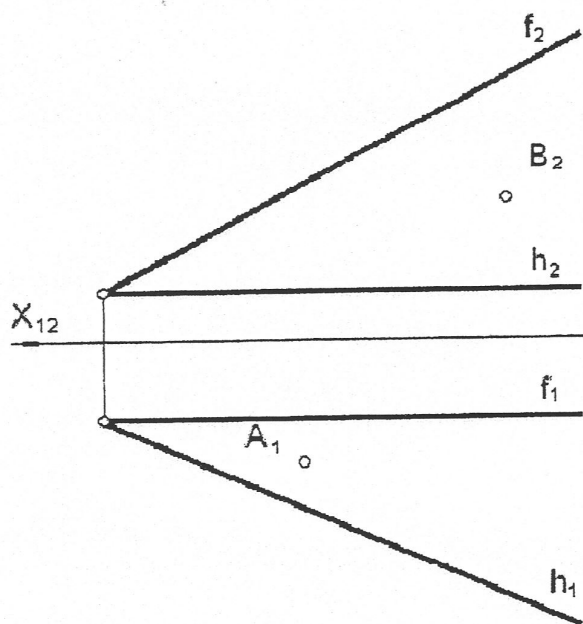
3. Достроить горизонтальную проекцию плоского пятиугольника $ABCDF$.



4. Построить горизонталь h и фронталь f , принадлежащие плоскости $\Sigma(A,B,C)$.

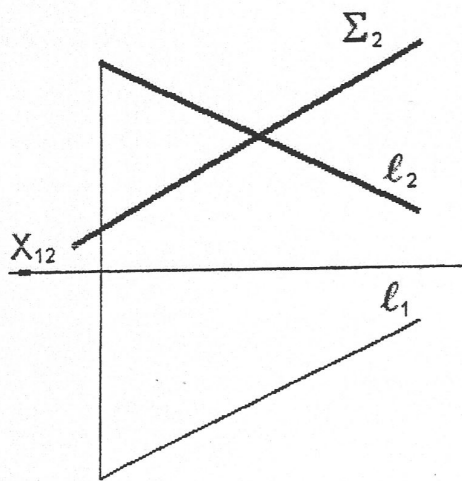


5. С помощью новых линий уровня построить в плоскости $\Sigma(h \cap f)$ отрезок AB , разноименные концы которого заданы.

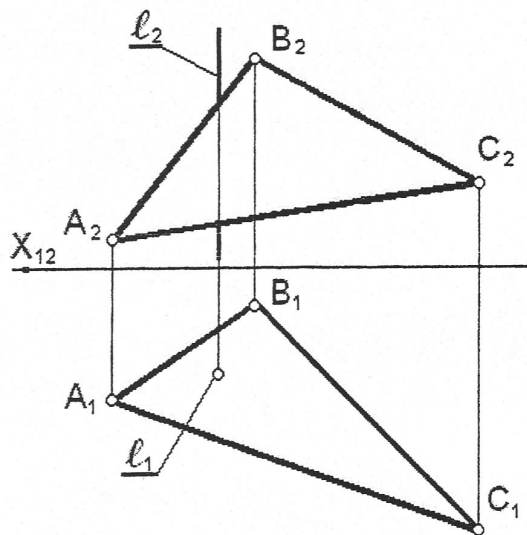


6. Построить точку пересечения K прямой ℓ с плоскостью Σ и определить видимость прямой.

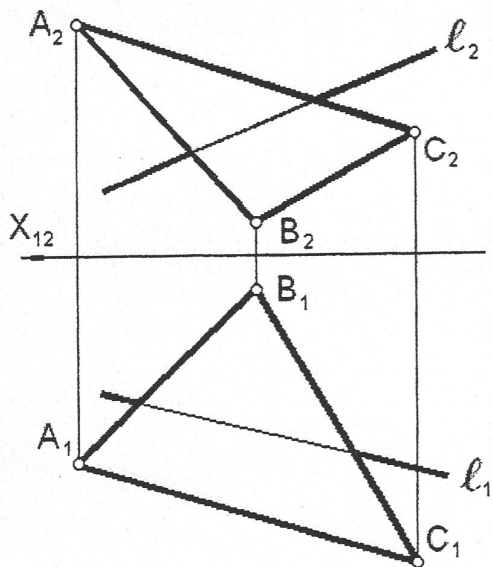
а) Σ – фронтально-проецирующая плоскость, ℓ – прямая общего положения.



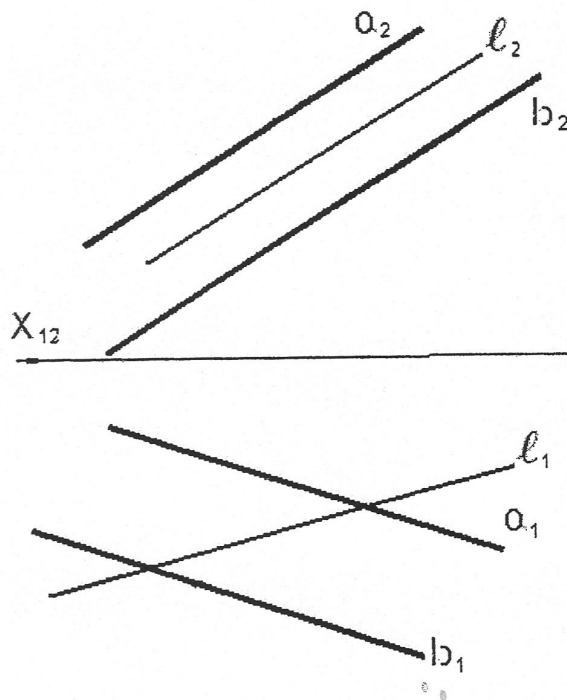
б) Σ – плоскость общего положения, ℓ – горизонтально-проецирующая прямая.



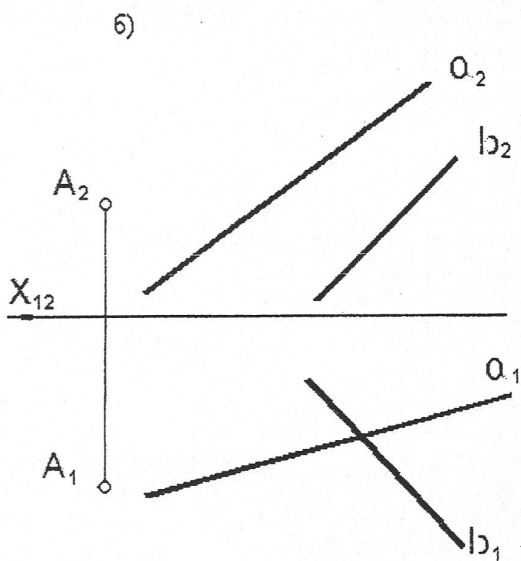
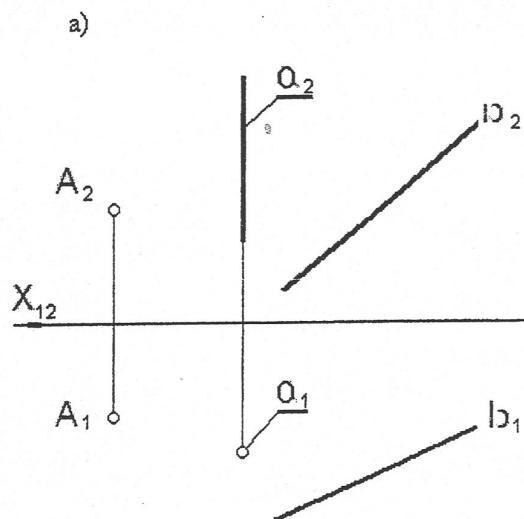
в) $\Sigma(A,B,C)$ – плоскость общего положения и ℓ – прямая общего положения.



г) $\Sigma(\text{all } b)$ – плоскость общего положения и ℓ – прямая общего положения.



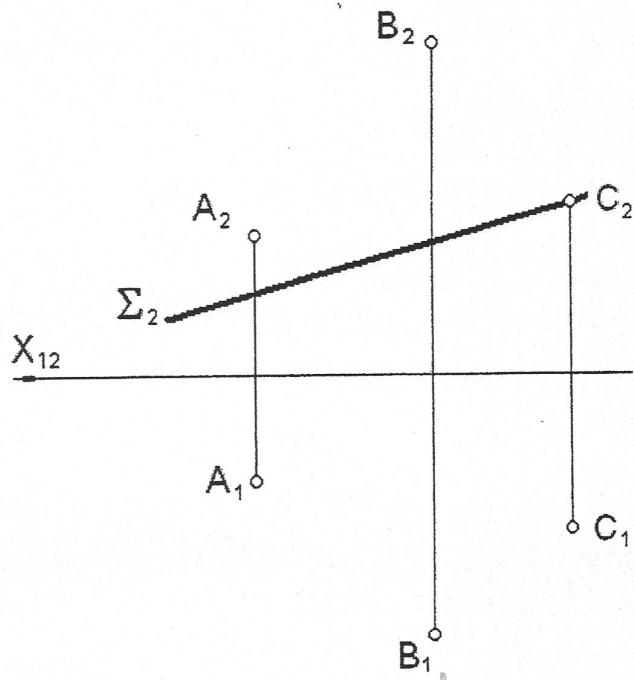
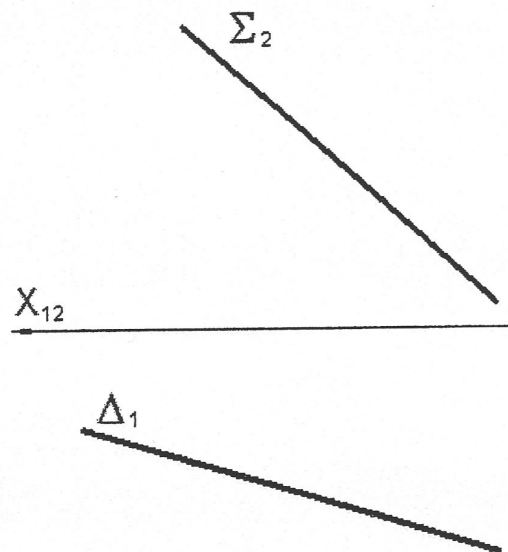
7. Через точку A провести прямую ℓ , пересекающую скрещивающиеся прямые a и b .



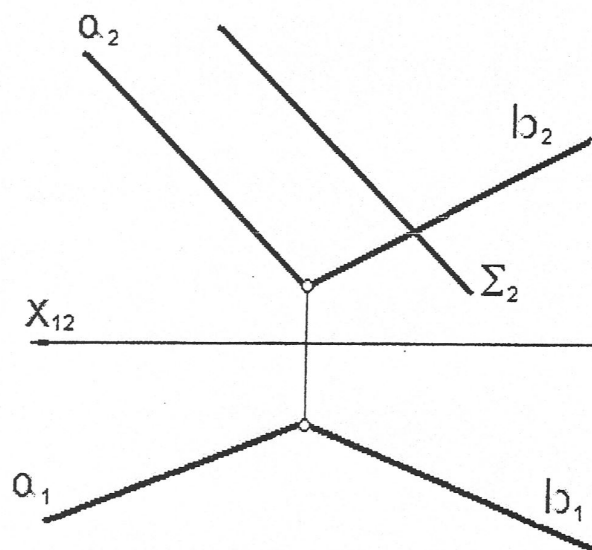
8. Определить проекции прямой m , как результат пересечения

а) фронтально-проецирующей плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$ с горизонтально-проецирующей $\Delta(\Delta_1)$.

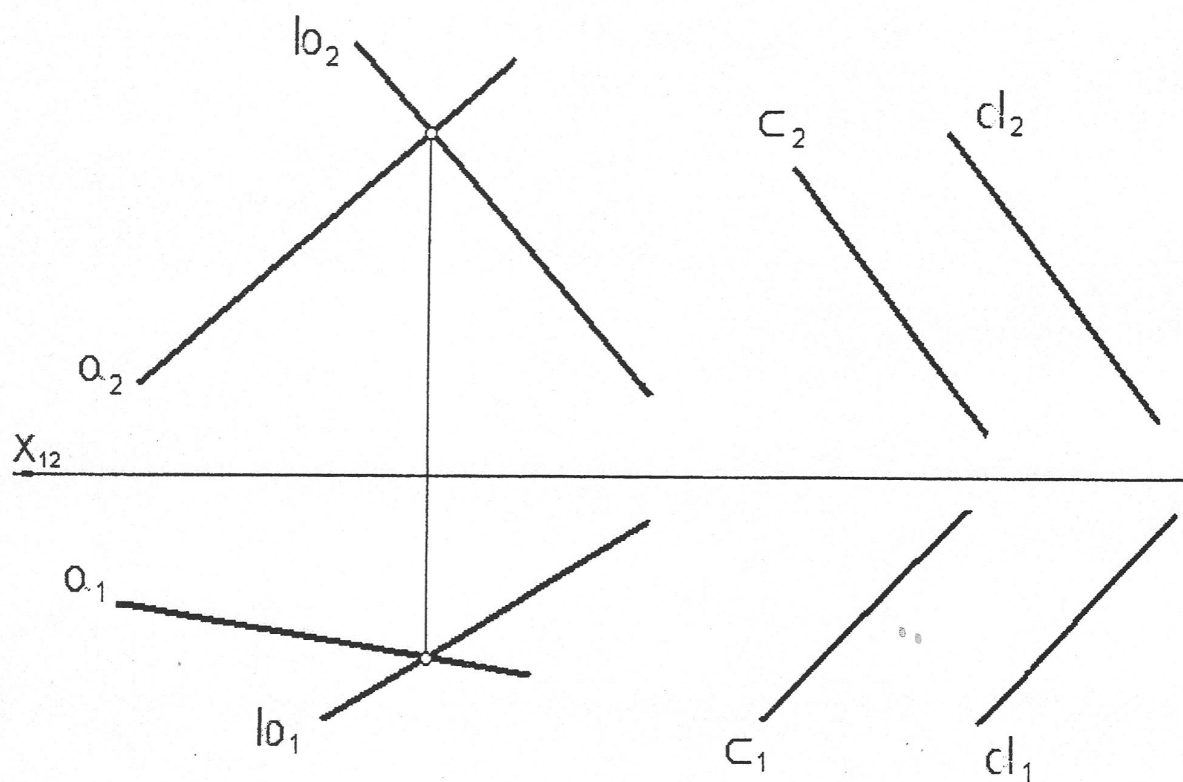
б) фронтально-проецирующей плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$ с плоскостью общего положения $\Delta(A,B,C)$.



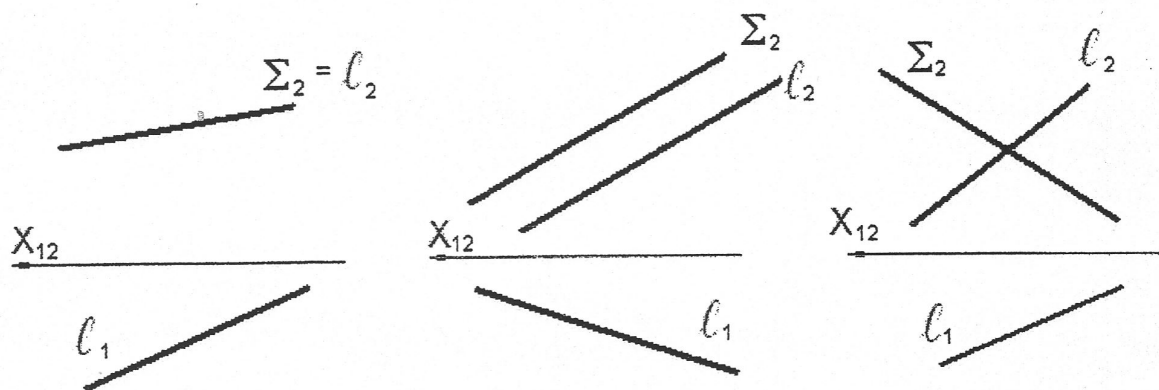
в) фронтально-проецирующей плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$ с плоскостью общего положения $\Gamma(a \cap b)$.



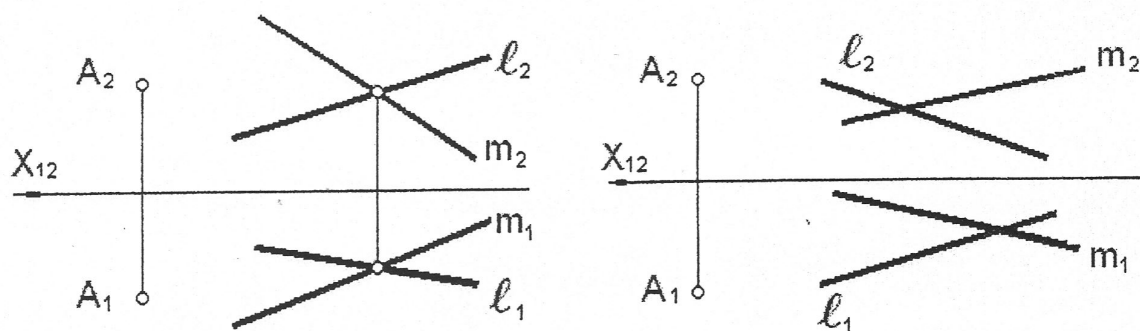
г) плоскостей общего положения $\Sigma(a \cap b) \Delta(c \cap d)$.



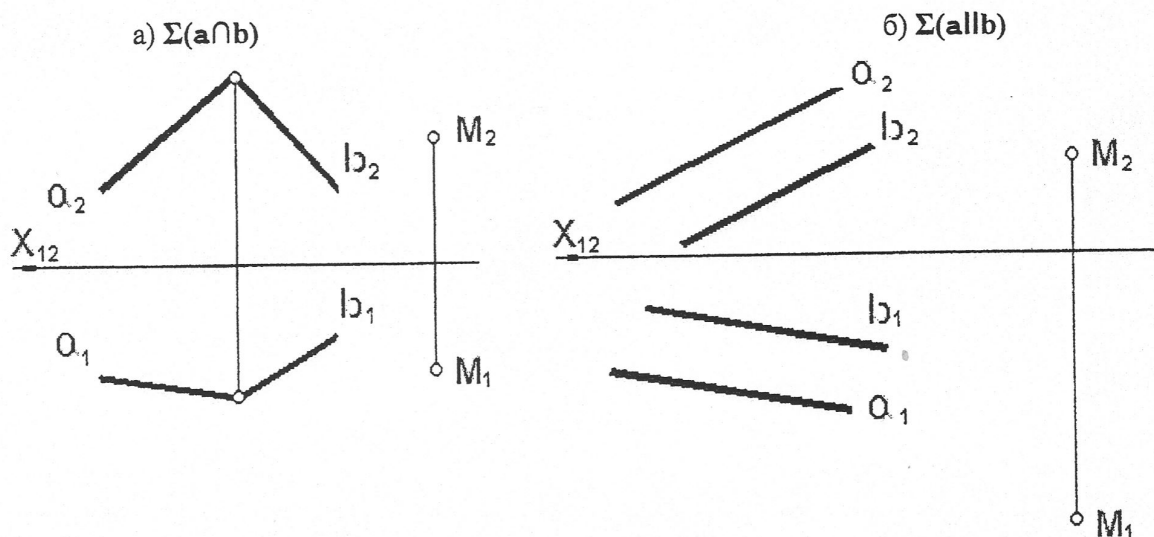
9. Определить положение ℓ относительно плоскости Σ .



10. Через точку A провести плоскость, параллельную двум прямым ℓ и m .

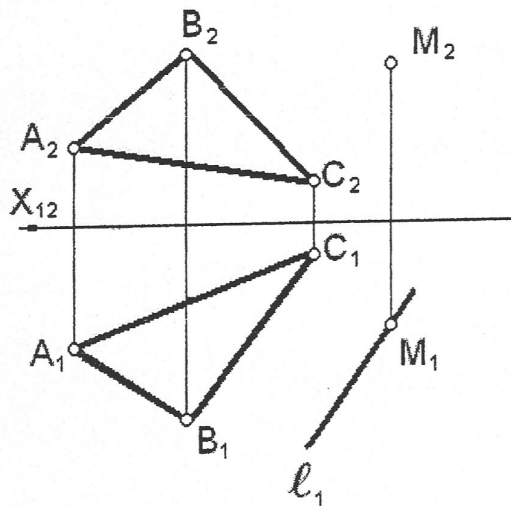


11. Через точку M провести плоскость, параллельную плоскости Σ .

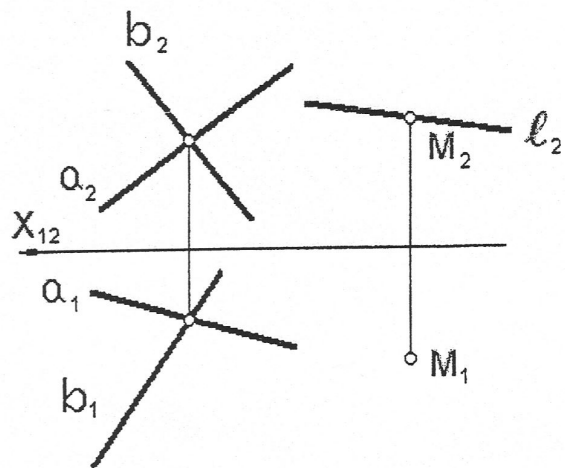


12. Достроить проекции прямой ℓ , параллельной плоскости Σ .

а) $\Sigma(A, B, C)$

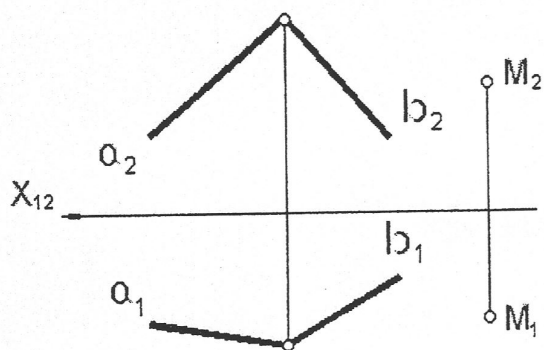


б) $\Sigma(a \cap b)$



13. Через точку M провести прямую ℓ , параллельную плоскости Σ .

а) $\Sigma(a \cap b)$



б) $\Sigma(a \parallel b)$

