Определение прогибов и углов поворотов методом Мора

Интеграл Мора позволяет определять прогибы и углы поворота заданного сечения балки, используя интегральное исчисление. Хотя данный метод предпочтительнее метода начальных параметров, он неудобен из-за необходимости вычисления интеграла. Из интеграла Мора был получен удобное для практического применения правило Верещагина, при котором не нужно вычислять интегралы, а только нужно находить площадь и центр тяжести эпюр.

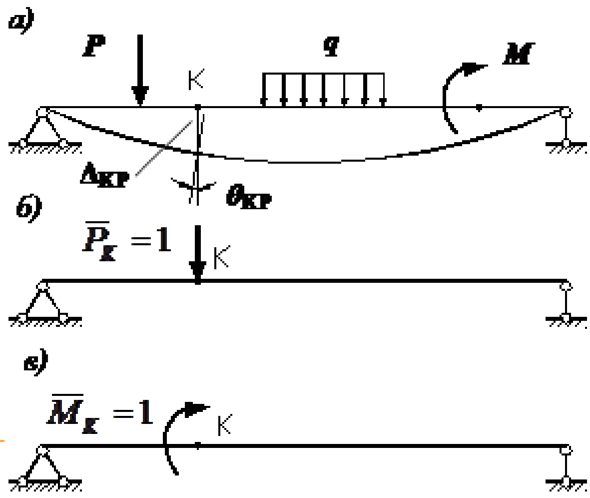

Рис. 15.6. Определение перемещений балки методом Мора

Получение формулы интеграла Мора

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 15.6, а. Обозначим M_{xP} и Q_{yP}, соответственно, изгибающий момент и поперечную силу, возникающие в заданной балке от действующей на нее группы нагрузок Р. Пусть требуется определить прогиб балки (Δ_{KP}) в точке К.

Введем в рассмотрение вспомогательную балку (та же балка, но нагруженная только единичной силой либо единичным изгибающим моментом). Нагрузим ее только одной силой $\overline{P}_K = 1$(рис. 15.6, б). Единичную силу приложим в точке К, где нужно определить прогиб.

Внутренние усилия, возникающие во вспомогательной балке, обозначим $\overline{M}_x$ и $\overline{Q}_y$.

Воспользуемся теперь теоремой о взаимности работ, согласно которой работа внешних сил, приложенных к вспомогательной балке на соответствующих перемещениях заданной балки равна взятой с обратным знаком работе внутренних сил заданной балки на соответствующих перемещениях вспомогательной балки. Тогда $\overline{P}_K \Delta_{KP} = \int_0^l M_{xP}\left(\frac{\overline{M}_x}{EI_x} dz\right) + \int_0^l kQ_{yP}\left(\frac{\overline{Q}_y}{GF} dz\right)$.

При определении перемещений в балке, как правило, можно пренебрегать влиянием поперечной силы, (не учитывать второе слагаемое).

Тогда, учитывая, что $\overline{P}_K = 1$, окончательно получим **формулу интеграла Мора**: $\Delta_{KP} = \int_0^l M_{xP}\left(\frac{\overline{M}_x}{EI_x} dz\right)$.

Определение перемещений по формуле интеграла Мора часто называют **определением перемещений методом Мора**, а саму формулу – **интегралом Мора**.

Входящие в интеграл Мора изгибающие моменты берутся в произвольном поперечном сечении и поэтому представляют собой аналитические функции от текущей координаты z.

Заметим, что если мы хотим в этой же точке К определить угол поворота поперечного сечения (θ_{KP}), то нам необходимо к вспомогательной балке приложить не единичную силу, а единичный момент $\overline{M}_K = 1$(рис. 15.6, в).

порядок вычисления перемещений методом Мора:

· к вспомогательной балке в той точке, где требуется определить перемещение, прикладываем единичное усилие. При определении прогиба прикладываем единичную силу $\overline{P}_K = 1$, а при определении угла поворота – единичный момент $\overline{M}_K = 1$;

· для каждого участка балки составляем выражения для изгибающих моментов заданной (M_{xP}) и вспомогательной ($\overline{M}_x$) балок;

· вычисляем интеграл Мора для всей балки по соответствующим участкам;

· если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичного усилия. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичного усилия.

Вычисление интеграла Мора пример

Пусть для шарнирно опертой балки постоянной изгибной жесткости $EI_x = const$, длиной l, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 15.7, а), требуется определить прогиб посредине пролета (f) и угол поворота на левой опоре (θ_A).

определение прогиба с помощью интеграла Мора

В том месте, где нам нужно определить прогиб, к вспомогательной балке прикладываем единичную силу $\overline{P}_K = 1$(рис. 15.7, б).

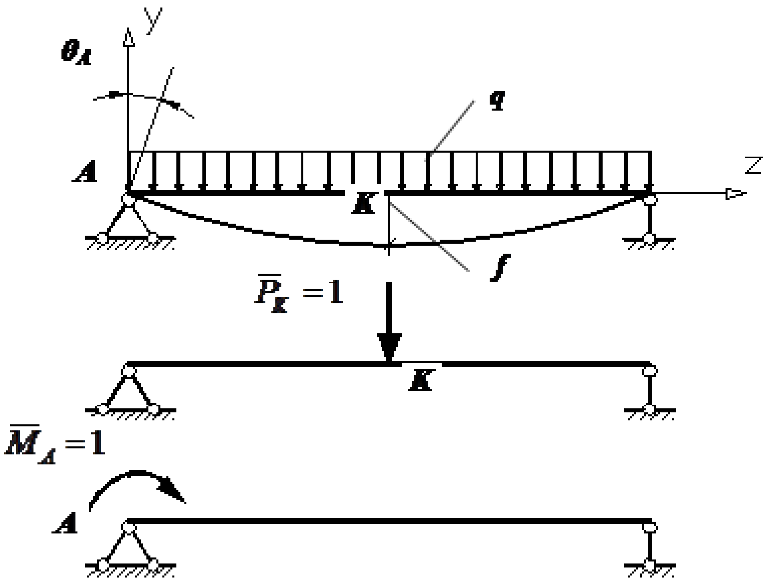

Рис. 15.7. Определение прогиба и угла поворота методом Мора

Записываем выражения для изгибающих моментов для каждого из двух участков ($0 \le z_1 \le l/2;\ \ 0 \le z_2 \le l/2$) заданной и вспомогательной балок:

$$M_{xP}(z_1) = +\frac{ql}{2}z_1 - qz_1\frac{z_1}{2} = \frac{qz_1}{2}(l - z_1);$$

$$M_{xP}(z_2) = +\frac{ql}{2}z_2 - qz_2\frac{z_2}{2} = \frac{qz_2}{2}(l - z_2);$$

$$\overline{M}_x(z_1) = +\frac{1}{2}z_1;\ \ \overline{M}_x(z_2) = +\frac{1}{2}z_2.$$

Вычисляем **интеграл Мора**. Учитывая симметрию балки, получим:

$$f = \Delta_{KP} = 2\frac{1}{EI_x}\int_0^{l/2}\frac{1}{2}z_1\frac{qz_1}{2}(l - z_1)dz = \frac{2}{EI_x}\frac{q}{4}\left(\frac{z_1^3}{3}l - \frac{z_1^4}{4}\right)\Bigg|_0^{l/2} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_x}.$$

Определение угла поворота методом Мора

Нагружаем вспомогательную балку единичным моментом $\overline{M}_A = 1$, прикладывая его в том месте, где мы ищем угол поворота (рис. 15.7, в).

Записываем выражения для изгибающих моментов в заданной и вспомогательной балках только для одного участка ($0 \le z \le l$):

$$M_{xP}(z) = +\frac{ql}{2}z - qz\frac{z}{2} = \frac{qz}{2}(l - z);$$

$$\overline{M}_x(z) = 1 - \frac{1}{l}z.$$

Тогда интеграл Мора будет иметь вид:

$$\theta_A = \Delta_{AP} = \frac{1}{EI_x}\int_0^l\left(1 - \frac{1}{l}z\right)\frac{qz}{2}(l - z)dz = \frac{1}{EI_x}\frac{q}{2l}\left(l^2\frac{z^2}{2} - 2l\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^l = \frac{1}{24}\frac{ql^3}{EI_x}.$$

Положительный знак в выражении для угла поворота поперечного сечения балки указывает на то, что поворот сечения происходит по направлению единичного момента $\overline{M}_A = 1$.