

Представление периодических сигналов рядом Фурье

Содержание

[Вводные замечания](#)

[Периодический сигнал. Тригонометрический ряд Фурье](#)

[Ряд Фурье в комплексной форме](#)

[Некоторые пояснения к ряду Фурье в комплексной форме](#)

[Спектр периодических сигналов](#)

[Выводы](#)

[Программная реализация в библиотеке DSPL](#)

[Список литературы](#)

Обнаружили ошибку? **Выделите ее мышью** и нажмите  + 

Вводные замечания

В данном разделе будет рассмотрено представление периодических сигналов при помощи ряда Фурье. Ряды Фурье являются основой теории спектрального анализа, потому что, **как мы увидим позже**, преобразование Фурье непериодического сигнала можно получить как предельный переход ряда Фурье при бесконечном периоде повторения. В результате свойства ряда Фурье также справедливы и для преобразования Фурье непериодических сигналов.

Мы рассмотрим выражения ряда Фурье в тригонометрической и комплексной форме, а также уделим внимание условиям Дирихле сходимости ряда Фурье. Кроме того, мы подробно остановимся на пояснении такого понятия как отрицательная частота спектра сигнала, которое часто вызывает сложность при знакомстве с теорией спектрального анализа.

Периодический сигнал. Тригонометрический ряд Фурье

Пусть имеется периодический сигнал $s(t)$ непрерывного времени t , который повторяется с периодом T с, т.е. $s(t + nT) = s(t)$, где n — произвольное целое число.

В качестве примера на рисунке 1 показана последовательность прямоугольных импульсов длительности τ с, повторяющиеся с периодом T с.

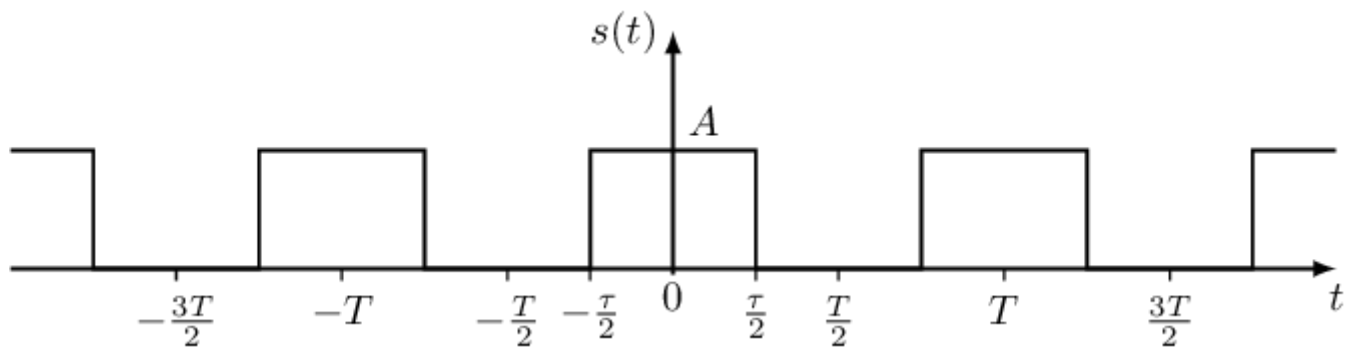


Рисунок 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Из курса математического анализа известно [1, стр. 158], что система тригонометрических функций

$$\{\varphi_n(t)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_n t), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_n t) \right\},$$

(1)

с кратными частотами $\omega_n = \Delta\omega n$, где $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ рад/с, n — целое число, образует ортонормированный базис для разложения периодических сигналов с периодом T , удовлетворяющих условиям Дирихле [1, стр. 165].

Условия Дирихле сходимости ряда Фурье требуют, чтобы периодический сигнал $s(t)$ был задан на сегменте $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, при этом удовлетворял следующим условиям:

- Сигнал $s(t)$ не должен иметь бесконечных значений.
- Сигнал $s(t)$ должен быть кусочно-непрерывным, т.е. иметь конечное число точек разрыва первого рода (скачки и устранимые разрывы).
- Сигнал $s(t)$ должен быть кусочно-монотонным и иметь конечное число экстремумов.

Например, периодическая функция $s(t) = \text{tg}(t)$ не удовлетворяет условиям Дирихле, потому что функция $s(t) = \text{tg}(t)$ имеет разрывы второго рода и принимает бесконечные значения при $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — произвольное целое. Таким образом, функция $s(t) = \text{tg}(t)$ не может быть представлена рядом Фурье.

Также можно привести пример функции $s(t) = \sin\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)$, которая является ограниченной, но также не удовлетворяет условиям Дирихле, поскольку имеет бесконечное число точек экстремума при приближении к нулю. График функции $s(t) = \sin\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)$ показан на рисунке 2.

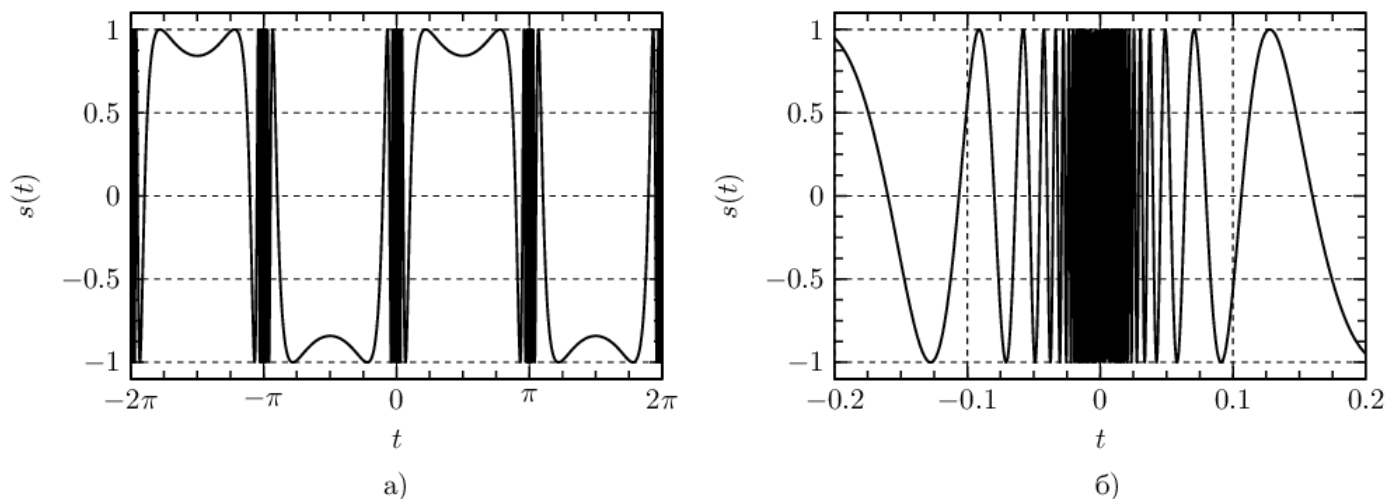


Рисунок 2. График функции $s(t) = \sin\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)$:
 а — два периода повторения; б — в окрестности $t = 0$

На рисунке 2а показано два периода повторения функции $s(t) = \sin\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)$, а на рисунке 2б — область в окрестности $t = 0$. Можно видеть, что при приближении t к нулю, частота колебаний бесконечно возрастает, и такая функция не может быть представлена рядом Фурье, потому что она не является кусочно-монотонной.

Необходимо заметить, что на практике не бывает сигналов с бесконечными значениями тока или напряжения. Функции с бесконечным числом экстремумов типа $s(t) = \sin\left(\frac{1}{\sin(t)}\right)$ также в прикладных задачах не встречаются. Все реальные периодические сигналы удовлетворяют условиям Дирихле и могут быть представлены бесконечным тригонометрическим рядом Фурье вида:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right), \quad \text{где}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(\omega_n t) dt,$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt, \quad \omega_n = \Delta\omega n = \frac{2\pi}{T} n.$$

(2)

В выражении (2) коэффициент a_0 задает постоянную составляющую периодического сигнала $s(t)$.

Во всех точках, где сигнал непрерывен, ряд Фурье (2) сходится к значениям данного сигнала, а в точках разрыва первого рода — к среднему значению $\frac{1}{2}(s(t-0) + s(t+0))$, где $s(t-0)$ и $s(t+0)$ — пределы слева и справа от точки разрыва соответственно.

Также из курса математического анализа известно [2, стр. 500], что использование усеченного ряда Фурье, содержащего только N первых членов вместо бесконечной суммы, приводит к приближенному представлению сигнала $s(t)$:

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right), \quad (3)$$

при котором обеспечивается минимум среднего квадрата ошибки. Рисунок 3 иллюстрирует приближение периодической последовательности прямоугольных импульсов и периодического пилообразного сигнала при использовании различного количества членов ряда Фурье N .

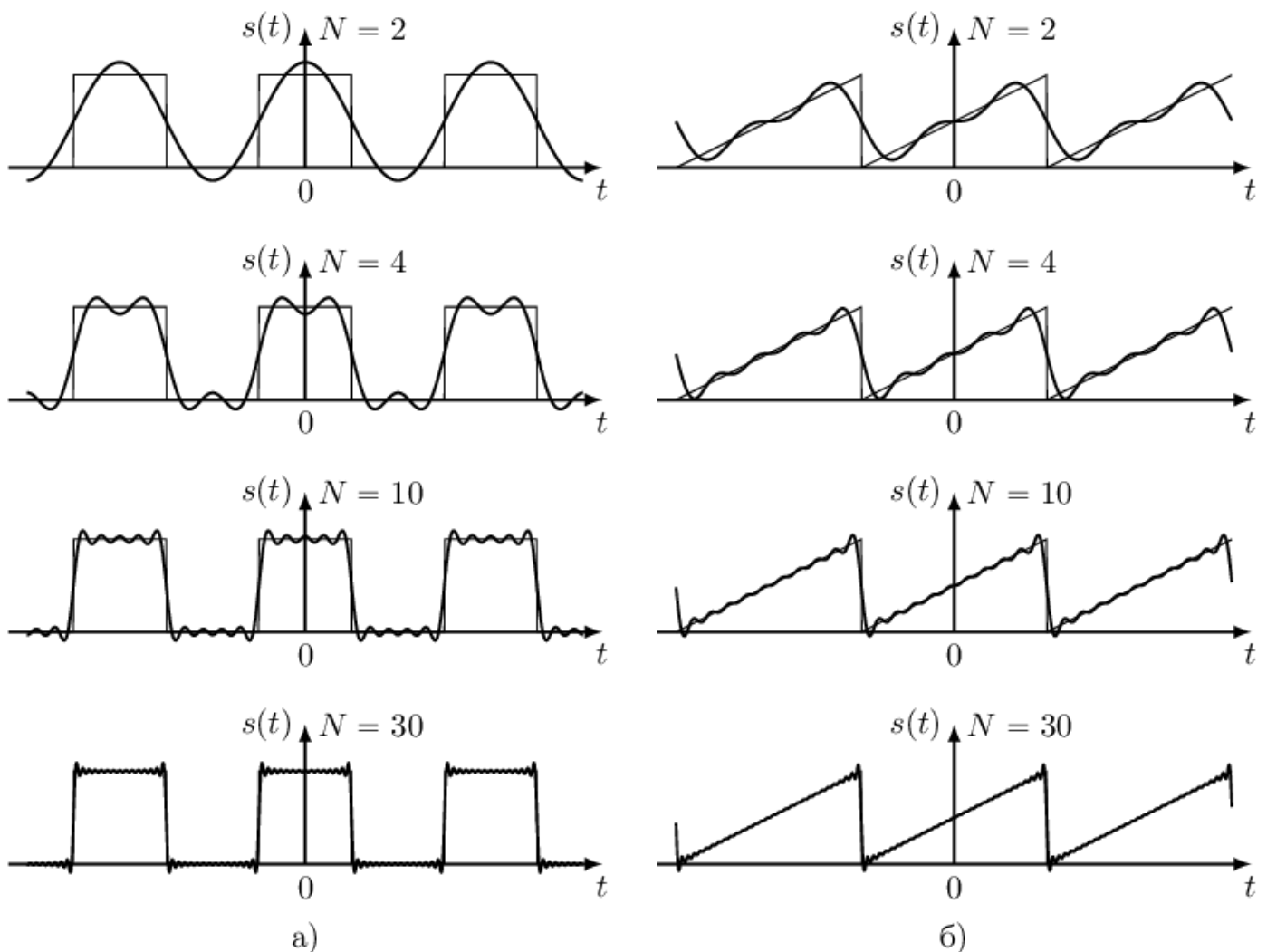


Рисунок 3. Приближение сигналов усеченным рядом Фурье:
 а — прямоугольных импульсов; б — пилообразного сигнала

Ряд Фурье в комплексной форме

В предыдущем параграфе мы рассмотрели тригонометрический ряд Фурье для разложения произвольного периодического сигнала $s(t)$, удовлетворяющего условиям Дирихле. Применяв формулу Эйлера, можно показать:

$$\begin{aligned} & \frac{a_n - jb_n}{2} \exp(j\omega_n t) + \frac{a_n + jb_n}{2} \exp(-j\omega_n t) = \\ & = \frac{a_n - jb_n}{2} (\cos(\omega_n t) + j \sin(\omega_n t)) + \frac{a_n + jb_n}{2} (\cos(\omega_n t) - j \sin(\omega_n t)) = \\ & = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье (2) с учетом (4):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \exp(j\omega_n t) + \frac{a_n + jb_n}{2} \exp(-j\omega_n t) \right). \quad (5)$$

Таким образом, периодический сигнал $s(t)$ может быть представлен суммой постоянной составляющей $\frac{a_0}{2}$ и комплексных экспонент, вращающихся с частотами $\pm\omega_n$ с коэффициентами $\frac{a_n - jb_n}{2}$ для положительных частот ω_n , и $\frac{a_n + jb_n}{2}$ для комплексных экспонент, вращающихся с отрицательными частотами $-\omega_n$.

Рассмотрим коэффициенты для комплексных экспонент, вращающихся с положительными частотами ω_n :

$$\begin{aligned} \frac{a_n - jb_n}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(\omega_n t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(\omega_n t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp(-j\omega_n t) dt, \quad \omega_n > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично, коэффициенты для комплексных экспонент, вращающихся с отрицательными частотами $-\omega_n$:

$$\begin{aligned} \frac{a_n + jb_n}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(-\omega_n t) dt + j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(-\omega_n t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp(-j\omega_n t) dt, \text{ при } \omega_n < 0. \end{aligned}$$

(7)

Выражения (6) и (7) совпадают, кроме того постоянную составляющую $\frac{a_0}{2}$ также можно записать через комплексную экспоненту на нулевой частоте:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp(-j\omega_n t) dt, \text{ при } \omega_n = 0.$$

(8)

Таким образом, (5) с учетом (6)–(8) можно представить как единую сумму при индексации n от минус бесконечности до бесконечности:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega_n) \exp(j\omega_n t), \quad \omega_n = \Delta\omega n = \frac{2\pi}{T} n, \\ S(\omega_n) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp(-j\omega_n t) dt = \begin{cases} \frac{a_n - jb_n}{2}, & \text{если } \omega_n > 0, \\ \frac{a_0}{2}, & \text{если } \omega_n = 0, \\ \frac{a_n + jb_n}{2}, & \text{если } \omega_n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(9)

Выражение (9) представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме $S(\omega_n)$ связаны с коэффициентами a_n и b_n ряда в тригонометрической форме, и определяются как для положительных, так и для отрицательных частот ω_n . Индекс n в обозначении частоты ω_n указывает номер дискретной гармоники, причем отрицательные индексы соответствуют отрицательным частотам ω_n .

Из выражения (2) следует, что для вещественного сигнала $s(t)$ коэффициенты a_n и b_n ряда (2) также являются вещественными. Однако (9) ставит в соответствие вещественному сигналу $s(t)$, набор комплексно-сопряженных коэффициентов $S(\omega_n)$, относящихся как положительным, так и к отрицательным частотам ω_n .

Некоторые пояснения к ряду Фурье в комплексной форме

В предыдущем параграфе мы осуществили переход от тригонометрического ряда Фурье (2) к ряду Фурье в комплексной форме (9). В результате, вместо

разложения периодических сигналов в базисе вещественных тригонометрических функций, мы получили разложение в базисе комплексных экспонент, с комплексными коэффициентами $S(\omega_n)$, да еще и появились отрицательные частоты в разложении! Поскольку данный вопрос часто встречает непонимание, то необходимо дать некоторые пояснения.

Во-первых, работать с комплексными экспонентами в большинстве случаев проще, чем с тригонометрическими функциями. Например, при умножении и делении комплексных экспонент достаточно лишь сложить (вычесть) показатели, в то время как формулы умножения и деления тригонометрических функций более громоздкие.

Дифференцировать и интегрировать экспоненты, пусть даже комплексные, также проще, чем тригонометрические функции, которые постоянно меняются при дифференцировании и интегрировании (синус превращается в косинус и наоборот).

Если сигнал периодический и вещественный, то тригонометрический ряд Фурье (2) кажется более наглядным, потому что все коэффициенты разложения a_0 , a_n и b_n остаются вещественными. Однако, часто приходится иметь дело с комплексными периодическими сигналами (например, при модуляции и демодуляции используют квадратурное представление комплексной огибающей). В этом случае при использовании тригонометрического ряда Фурье все коэффициенты a_0 , a_n и b_n разложения (2) станут комплексными, в то время как при использовании ряда Фурье в комплексной форме (9) будут использованы одни и те же коэффициенты разложения $S(\omega_n)$ как для вещественных, так и для комплексных входных сигналов.

Ну и наконец, необходимо остановиться на пояснении отрицательных частот, которые появились в (9). Этот вопрос часто вызывает непонимание. В повседневной жизни мы не сталкиваемся с отрицательными частотами. Например, мы никогда не настраиваем свой радиоприемник на отрицательную частоту. Давайте рассмотрим следующую аналогию из механики. Пусть имеется механический пружинный маятник, который совершает свободные колебания с некоторой частотой ω_0 . Может ли маятник колебаться с отрицательной частотой ω_0 ? Конечно нет. Как не бывает радиостанций, выходящих в эфир на отрицательных частотах, так и частота колебаний маятника не может быть отрицательной. Но пружинный маятник — одномерный объект (маятник совершает колебания вдоль одной прямой).

Мы можем также привести еще одну аналогию из механики: колесо, вращающееся с частотой ω_0 . Колесо, в отличие от маятника вращается, т.е. точка на поверхности колеса перемещается в плоскости, а не просто совершает колебания вдоль одной прямой. Поэтому для однозначного задания вращения колеса, задать частоту вращения недостаточно, потому что необходимо задать также направление вращения. Вот именно для этого мы и можем использовать знак частоты.

Так, если колесо вращается с угловой частотой ω_0 рад/с против часовой стрелки, то считаем, что колесо вращается с положительной частотой, а если по направлению часовой стрелки, то частота вращения будет отрицательной. Таким образом, для задания вращения отрицательная частота перестает быть бессмыслицей и указывает направление вращения.

А теперь самое главное, что мы должны понять. Колебание одномерного объекта (например, пружинного маятника) может быть представлено как сумма вращений двух векторов, показанных на рисунке 4.

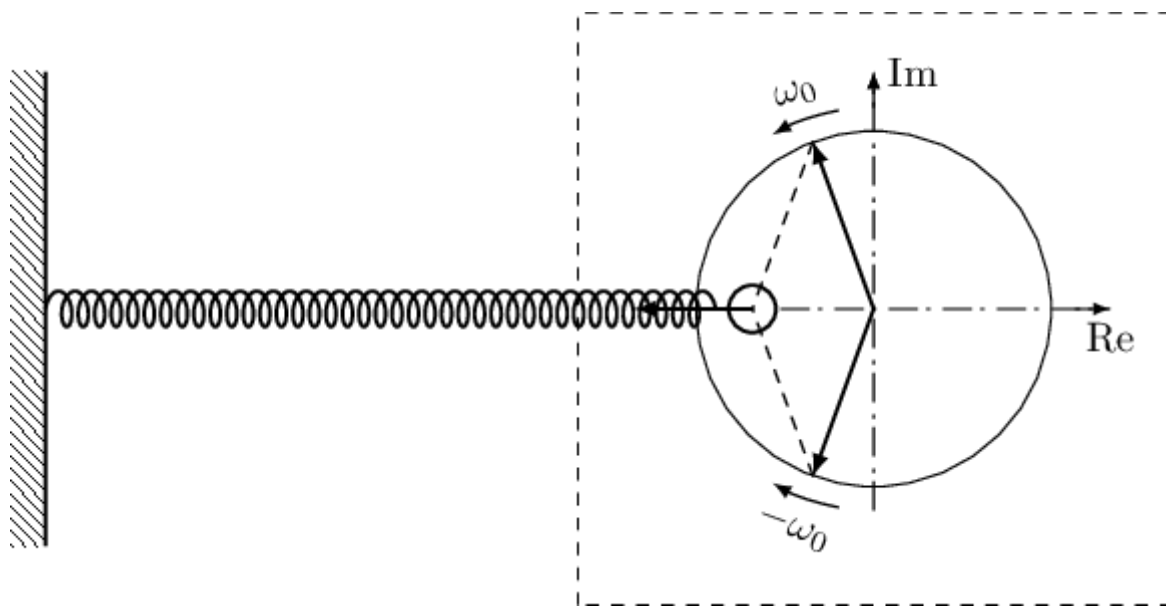


Рисунок 4. Колебание пружинного маятника как сумма вращений двух векторов на комплексной плоскости

Маятник совершает колебания вдоль вещественной оси комплексной плоскости с частотой ω_0 по гармоническому закону $\cos(\omega_0 t)$. Движение маятника показано горизонтальным вектором. Верхний вектор совершает вращения на комплексной плоскости с положительной частотой ω_0 (против часовой стрелки), а нижний вектор вращается с отрицательной частотой $-\omega_0$ (по направлению часовой стрелки). Рисунок 4 наглядно иллюстрирует хорошо известное из курса тригонометрии соотношение:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)}{2}.$$

(10)

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме (9) представляет периодические одномерные сигналы $s(t)$ как сумму векторов на комплексной плоскости, вращающихся с положительными и отрицательными частотами. При этом обратим внимание, что в случае вещественного сигнала согласно (9) коэффициенты разложения $S(\omega_n)$ для отрицательных частот $\omega_n < 0$ являются комплексно-сопряженными соответствующим коэффициентам для положительных частот ω_n . В случае комплексного сигнала это свойство коэффициентов не выполняется ввиду того, что a_n и b_n также являются комплексными.

Спектр периодических сигналов

Ряд Фурье в комплексной форме представляет собой разложение периодического сигнала $s(t)$ в сумму комплексных экспонент, вращающихся с положительными и отрицательными частотами кратными $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ рад/с с соответствующими комплексными коэффициентами $S(\omega_n)$, которые определяют спектр сигнала $s(t)$. Комплексные коэффициенты $S(\omega_n)$ могут быть представлены по формуле Эйлера как $S(\omega_n) = |S(\omega_n)| \exp(j\Phi(\omega_n))$, где $|S(\omega_n)|$ — амплитудный спектр, а $\Phi(\omega_n)$ — фазовый спектр.

Поскольку периодические сигналы раскладываются в ряд только на фиксированной сетке частот $\omega_n = \Delta\omega n$, то спектр $S(\omega_n)$ периодических сигналов является линейчатым (дискретным).

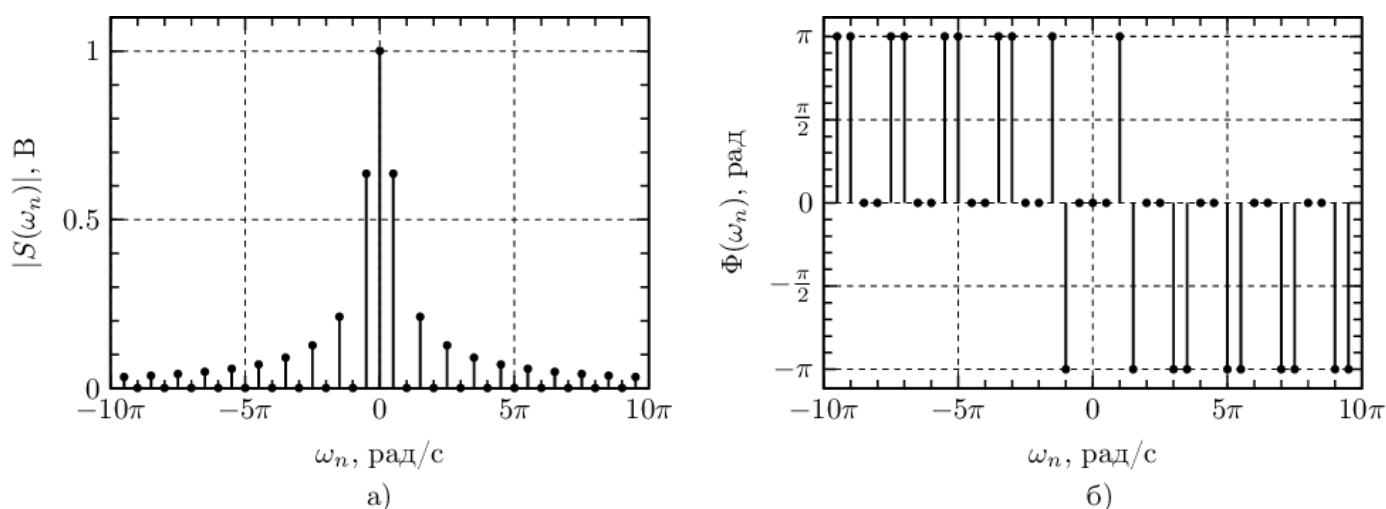


Рисунок 5. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов:
а — амплитудный спектр; б — фазовый спектр

На рисунке 5 приведен пример амплитудного $|S(\omega_n)|$ и фазового $\Phi(\omega_n)$ спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов (см. рисунок 1) при $T = 4$ с, длительности импульса $\tau = 2$ с и амплитуде импульсов $A = 2$ В.

Амплитудный спектр исходного вещественного сигнала является симметричным относительно нулевой частоты, а фазовый спектр — антисимметричным. При этом заметим, что значения фазового спектра $\Phi(\omega_n) = \pi$ и $\Phi(\omega_n) = -\pi$ соответствуют одной и той же точке комплексной плоскости $\exp(\pm j\pi) = -1$.

Можно сделать вывод, что все коэффициенты разложения приведенного сигнала являются чисто вещественными, и фазовый спектр $\Phi(\omega_n) = \pm\pi$ соответствует отрицательным коэффициентам $S(\omega_n)$.

Обратим внимание, что размерность амплитудного спектра $|S(\omega_n)|$ совпадает с размерностью сигнала $s(t)$. Если $s(t)$ описывает изменение напряжения во времени, измеряемое в вольт, то амплитуды гармоник спектра $|S(\omega_n)|$ также будут иметь размерность вольт.

Выводы

В данном разделе рассмотрено представление периодических сигналов при помощи ряда Фурье. Приведены выражения для ряда Фурье в тригонометрической и комплексной формах. Мы уделили особое внимание условиям Дирихле сходимости ряда Фурье и были приведены примеры функций, для которых ряд Фурье расходится.

Мы подробно остановились на выражении ряда Фурье в комплексной форме и показали, что периодические сигналы как вещественные, так и комплексные представляются рядом комплексных экспонент с положительными и отрицательными частотами. При этом коэффициенты разложения являются также комплексными и характеризуют амплитудный и фазовый спектр периодического сигнала.

В [следующем разделе](#) мы более детально рассмотрим свойства спектров периодических сигналов.

Вопросы, замечания и пожелания вы можете оставить на
странице обсуждения статьи

Программная реализация в библиотеке DSPL

Данные для построения рисунков данного раздела были просчитаны при использовании [библиотеки DSPL-2.0](#)

Ниже приведён исходный код программы расчета данных для построения рисунка 2:

```
fourier_series_dirichlet_ex.c
```

[раскрыть](#)

Исходный код программы расчета данных для построения графиков приближения периодической последовательности прямоугольных импульсов и пилообразного сигнала усеченным рядом Фурье (рисунок 3):

```
fourier_series_rec.c
```

[раскрыть](#)

Исходный код программы расчета амплитудного и фазового спектра (рисунок 5):

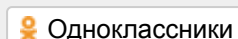
```
fourier_series_pimp_spectrum.c
```

[раскрыть](#)

Смотри также

[Некоторые свойства разложения периодических сигналов в ряд Фурье](#)
[Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов](#)
[Преобразование Фурье неперiodических сигналов](#)

Информация была полезна? Поделитесь с друзьями!



Список литературы

[1] *Воробьев Н.Н. Теория рядов.* Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 408 с.

[2] *Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение.* Москва, Мир, 1998.

[3] *Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы.* Москва, ЛЕНАНД, 2016, 528 с. ISBN 978-5-9710-2464-4

[4] *Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы* Москва, Советское радио, 1977, 608 с.

[5] *Дёч, Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа.* Москва, Наука, 1965, 288 с.

[6] *Bracewell R. The Fourier Transform and Its Applications* McGraw-Hills, 1986, 474 с. ISBN 0-07-007-015-6

Последнее изменение страницы: 07.02.2021 (14:09:23)
Страница создана Latex to HTML translator ver. 5.20.11.14

[Содержание](#)

[DSPL-2.0](#)

[Форум](#)

© Бахурин Сергей 2015 - 2020. Все права защищены.
Копирование материалов сайта без разрешения автора запрещено.